ZEITSCHRIFT
des
Architekten- und Ingenieur-Vereins
zu
HANNOVER.

Herausgegeben von dem Vorstande des Vereins.

Band XXX. Jahrgang 1884. Heft 1.

Angelegenheiten des Vereins.

Verzeichniss der Mitglieder.

(Am 1. Januar 1884.)

Vorstand.

(Gewählt am 7. November 1883.)

Baurath, Professor **Garbe**, Vorsitzender.
Architekt **Götze**, Stellvertreter des Vorsitzenden.
Professor **Barkhausen**, Schriftführer.
Reg.-Baumeister **Lehmbeck**, Stellvertreter des Schriftführers.
Eisenbahn-Direktor a. D. **Bolenius**, Bibliothekar.
Baurath, Professor **Dolezalek**.
Reg.-Baumeister **Wiesner**.
Postbaurath a. D. **K. Fischer**, Kassen- und Rechnungsführer.

Redakteur

der Vereins-Zeitschrift: Ingenieur **Keck**, Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.

A. Ehren-Mitglieder.

1. **von Engerth**, k. k. Regierungsrath und General-Direktors-Stellvertreter der priv. österr. Staats-Eisenbahn-Gesellschaft zu Wien.
2. **Forrest**, Sekretär des Instituts der Civil-Ingenieure zu London.
3. **Funk**, Geh. Regierungs- und Oberbaurath zu Köln.
4. **Hagen**, Dr., Ober-Landes-Baudirektor, Wirklicher Geh. Rath zu Berlin.
5. **Hase**, Geh. Regierungsrath, Professor an der Technischen Hochschule und Konsistorial-Baumeister zu Hannover.
6. **Manby**, Oberstlieutenant, Sekretär des Instituts der Civil-Ingenieure zu London.
7. **Rühlmann**, Dr., Geh. Regierungsrath, Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.
8. **Schmidt**, Fr., Dombaumeister, k. k. Professor und Ober-Baurath zu Wien.
9. **Schuster**, Oberhofbaurath a. D. zu Hannover.
10. **Winkler, E.**, Dr., Professor an der Technischen Hochschule zu Berlin.

B. Korrespondirende Mitglieder.

1. **Brereton, R. S.**, Civil-Ingenieur zu London.
2. **Dürre**, Dr., Professor an der Technischen Hochschule zu Aachen.
3. **Fränkel, W.**, Dr., Professor am Polytechnikum zu Dresden.
4. **Gottgetreu, R.**, Professor an der Technischen Hochschule zu München.
5. **Heusinger von Waldegg**, Ober-Ingenieur zu Hannover.
6. **Schmitt, E.**, Dr., Professor an der Technischen Hochschule zu Darmstadt.
7. **Weifs, Th.**, Dr., Professor an der Technischen Hochschule zu Brünn.

C. Wirkliche Mitglieder.

1. **Abraham, A.**, Reg.-Bauführer zu Tuchel.
2. **Albrecht**, Bauinspektor zu Nienburg a. d. Weser.
3. **Almstedt**, Reg.-Bauführer zu Hannover.
4. **Anders**, Architekt zu Hannover.
5. **Andersen, H. N.**, Reg.-Baumeister zu Magdeburg.
6. **Anthes, R.**, Reg.-Bauführer zu Verden.
7. **Appel, G.**, Ingenieur zu Wittenberge.
8. **Arnold**, Kreis-Bauinspektor zu Hanau.
9. **Arnoldi**, Ingenieur und Eisenbahn-Bauunternehmer zu Mainz.
10. **Arntz, L.**, Reg.-Bauführer zu Köln.
11. **Auhagen**, Baurath zu Herrenhausen.
12. **Baafs, James R.**, Ingenieur zu London.
13. **Bach**, Ober-Ingenieur zu Linden.
14. **Bachem, E.**, Reg.-Baumeister zu Hannover.
15. **Bader, G.**, Architekt zu Merxhausen.
16. **Ballauf**, Eisenbahn-Bau- und Betriebs-Inspektor zu Berlin.
17. **Bansen**, Baurath zu Hannover.
18. **Barkhausen**, Professor an der Technischen Hochschule zu Hannover.
19. **Bartels**, Eisenbahn-Bau- und Betriebs-Inspektor zu Berlin.
20. **Bartling**, Ingenieur zu Hannover.
21. **Bäseler, A.**, Reg.-Baumeister zu Hannover.
22. **Baumert**, Regierungs- und Baurath zu Bromberg.
23. **v. d. Beck**, Landes-Baurath zu Merseburg.
24. **Becké**, Eisenbahn-Direktor zu Harburg.
25. **Becker**, Reg.-Bauführer zu Elberfeld.
26. **Beckering**, Bauinspektor zu Düsseldorf.
27. **Beckmann, O. E.**, Kreis-Bauinspektor zu Fulda.
28. **Beckmann**, Reg.-Baumeister zu Pr. Holland in Ostpreufsen.
29. **Beckmann, K.**, Reg.-Bauführer zu Berlin.
30. **Beermann, F.**, Reg.-Bauführer zu Berlin.
31. **Behnes, A.**, Baumeister zu Osnabrück.
32. **Behnes**, Reg.-Baumeister zu Harburg.
33. **Beisner, F.**, Kreis-Bauinspektor zu Heiligenstadt.
34. **Ben Saude, J.**, Ingenieur zu Hannover.
35. **Bensen**, Geh. Regierungsrath zu Berlin.
36. **Berendt**, Eisenbahn-Bau- und Betriebs-Inspektor zu Essen.
37. **Bergfeld**, Bezirks-Bauinspektor zu Walterhausen i. Thür.
38. **Berns, J.**, Reg.-Bauführer zu Berlin.
39. **Bertram**, Baurath zu Verden.
40. **Beyer**, Reg.-Baumeister zu Küstrin.
41. **Beyhl**, Baumeister zu Stuttgart.
42. **Bickel**, Reg.-Bauführer zu Neumünster i. Holstein.
43. **Biedermann**, Bauinspektor zu Aurich.
44. **Bindewald**, Landes-Bauinspektor zu Stendal.
45. **Birnbaum**, Civilingenieur zu Berlin.
46. **Bischoff**, Eisenbahn-Ingenieur zu Gmund am Tegernsee.

Kleinere Mittheilungen.

Der Satz von der Abgeleiteten der ideellen Formänderungs-Arbeit;

mitgetheilt von H. Müller-Breslau,
Docent an der Technischen Hochschule zu Hannover.

In seinem hervorragenden Werke: Sur l'équilibre des sytèmes élastiques*) hat **Castigliano** den Satz bewiesen:

Drückt man die Formänderungs-Arbeit eines elastischen, homogenen, isotropen Körpers als Funktion der äufseren Kräfte aus, so ist die Verschiebung δ des Angriffspunktes einer äufseren Kraft P im Sinne dieser Kraft gleich der nach P gebildeten partiellen Abgeleiteten der Formänderungs-Arbeit, d. h. es ist

$$\delta = \frac{dA}{dP}.$$

Dieser Satz ist gültig, wenn mit den Formänderungen wie mit unendlich kleinen Gröfsen gerechnet wird (was in den meisten Fällen, mit denen es die praktische Elasticitätslehre zu thun hat, zulässig ist) und wenn derjenige Temperatur-Zustand angenommen wird, für welchen der gewichtslos und unbelastet gedachte Körper spannungslos ist.

Die Anwendung dieses Satzes auf die unverschieblichen Stützpunkte des Körpers liefert zur Berechnung der statisch nicht bestimmbaren Auflager-Widerstände X ein System von Gleichungen:

$$\frac{dA}{dX} = 0, \text{ d. h. } A \text{ ein Minimum},$$

und ebenso führt er zu dem Satze, dass auch statisch nicht bestimmbare, innere Kräfte der Bedingung

A ein Minimum

zu genügen haben.

Es lässt sich nun nachweisen:

Aendert sich der oben angegebene Temperatur-Zustand in irgend einem Punkte x, y, z des auf rechtwinklige Koordinaten bezogenen elastischen Körpers um t^0 und sind

$$\sigma_x\,,\quad \sigma_y\,,\quad \sigma_z$$

die in den Seitenflächen des Elementarkörpers $(dx\ dy\ dz)$ thätigen Normalspannungen, so muss in Gl. 1 der Werth A ersetzt werden durch den Werth

$$A_i = A + \int (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\ \varepsilon\, t\, d\,V, \tag{2}$$

welchen wir die **ideelle Formänderungs-Arbeit** nennen wollen und in welchem ε die Dehnung für $t = 1^0$ und V das Volumen des Körpers bedeuten.

Den Beweis für obigen Satz führen wir mit Hülfe des Satzes der virtuellen Arbeiten, dessen Anwendbarkeit aus der vorhin hervorgehobenen Zulässigkeit, die Formänderungen als unendlich kleine Gröfsen zu behandeln, gefolgert werden kann.

Auf den in beliebig vielen Punkten gestützten Körper mögen beliebige äufsere Kräfte P_1, P_2, P_3...... wirken, und es seien die Stützen-Widerstände mit Hülfe der Gleichgewichts-Bedingungen soweit wie möglich durch die Kräfte P und die übrig bleibenden, statisch nicht bestimmbaren Widerstände als unabhängige Veränderliche ausgedrückt. Wird nun bei Aufstellung der Bedingungen für das Gleichgewicht zwischen den inneren und äufseren Kräften die Gestalt des Körpers als unveränderlich angenommen, weil ja die Formänderungen als Differentialien gegen die endlichen Abmessungen des Körpers zu vernachlässigen sind, so werden die Normalspannungen $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z$ und die Schubspannungen $\tau_x\ \tau_y\ \tau_z$ als lineare Funktionen der äufseren Kräfte erhalten; sie erscheinen, wenn P_m irgend eine der äufseren Kräfte ist, in der Form

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x' + \sigma_x'' P_m & \tau_x &= \tau_x' + \tau_x'' P_m \\ \sigma_y &= \sigma_y' + \sigma_y'' P_m & \tau_y &= \tau_y' + \tau_y'' P_m \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

unter σ_x', σ_y', ..., τ_x', τ_y', ... diejenigen Werthe verstanden, welche die Spannungen für den Fall $P_m = 0$ annehmen, während σ_x'', σ_y'', ..., τ_x'', τ_y'', ... diejenigen Spannungen sind, welche in dem Körper entstehen, sobald auf denselben nur die Kraft $P_m = 1$ und die durch diese Kraft hervorgerufenen, statisch bestimmten Stützen-Widerstände wirken.

Ist nun die wirkliche Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft P_m im Sinne dieser Kraft $= \delta_m$, so muss, da die Stützen-Widerstände keine Arbeit verrichten, nach dem Satze der virtuellen Arbeiten die Arbeit $1 \cdot \delta_m$ gleich derjenigen Arbeit sein, welche durch Multiplikation der durch die Kraft $P_m = 1$ hervorgerufenen inneren Kräfte mit den wirklichen Wegen ihrer Angriffspunkte erhalten wird. Daraus folgt, wenn

$$\varepsilon_x\,,\ \varepsilon_y\,,\ \varepsilon_z\,,\quad \gamma_x\,,\ \gamma_y\,,\ \gamma_z$$

die wirklichen, durch die Spannungen σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z und durch die Aenderung des Temperatur-Zustandes bedingten Dehnungen und Verschiebungen des Körper-Elementes $(dx\ dy\ dz)$ sind,

$$1 \cdot \delta_m = \int (\varepsilon_x \sigma_x'' + \varepsilon_y \sigma_y'' + \varepsilon_z'' \sigma_z'' + \gamma_x \tau_x'' + \gamma_y \tau_y'' + \gamma_z \tau_z'')\ d\,V,$$

wofür man, wegen

$$\sigma_x'' = \frac{d\,\sigma_x}{d\,P_m}, \quad \sigma_y'' = \frac{d\,\sigma_y}{d\,P_m}, \quad \sigma_z'' = \frac{d\,\sigma_z}{d\,P_m},$$

$$\tau_x'' = \frac{d\,\tau_x}{d\,P_m}, \quad \tau_y'' = \frac{d\,\tau_y}{d\,P_m}, \quad \tau_z'' = \frac{d\,\tau_z}{d\,P_m},$$

auch schreiben kann:

$$\delta_m = \int \Big(\varepsilon_x \frac{d\,\sigma_x}{d\,P_m} + \varepsilon_y \frac{d\,\sigma_y}{d\,P_m} + \varepsilon_z \frac{d\,\sigma_z}{d\,P_m} + \gamma_x \frac{d\,\tau_x}{d\,P_m} + \gamma_y \frac{d\,\tau_y}{d\,P_m} + \gamma_z \frac{d\,\tau_z}{d\,P_m} \Big). \tag{3}$$

Ist $\frac{1}{m}$ der Koefficient der Querdehnung,
E der Modul der Normal-Elasticität,
G der Modul der Schub-Elasticität,

so folgt bekanntlich

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\Big(\sigma_x - \frac{\sigma_y + \sigma_z}{m}\Big) + \varepsilon\, t$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\Big(\sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_z}{m}\Big) + \varepsilon\, t$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\Big(\sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{m}\Big) + \varepsilon\, t$$

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}, \quad \gamma_y = \frac{\tau_y}{G}, \quad \gamma_z = \frac{\tau_z}{G},$$

*) Turin, Negro, 1879, S. 26.

und Gl. 3 geht über in

$$\delta_m = \frac{1}{E}\int\Big\{\sigma_x \frac{d\,\sigma_x}{d\,P_m} + \sigma_y \frac{d\,\sigma_y}{d\,P_m} + \sigma_z \frac{d\,\sigma_z}{d\,P_m} - \frac{1}{m}\Big[(\sigma_y + \sigma_z)\frac{d\,\sigma_x}{d\,P_m} + (\sigma_z + \sigma_x)\frac{d\,\sigma_y}{d\,P_m} + (\sigma_x + \sigma_y)\frac{d\,\sigma_z}{d\,P_m}\Big]\Big\}\,d\,V + \frac{1}{G}\int\left(\tau_x \frac{d\,\tau_x}{d\,P_m} + \tau_y \frac{d\,\tau_y}{d\,P_m} + \tau_z \frac{d\,\tau_z}{d\,P_m}\right)d\,V + \int \varepsilon\,t\,d\,V\left(\frac{d\,\sigma_x}{d\,P_m} + \frac{d\,\sigma_y}{d\,P_m} + \frac{d\,\sigma_z}{d\,P_m}\right).$$

Hierfür aber kann geschrieben werden:

$$\delta_m = \frac{d\,A_i}{d\,P_m},$$

wobei $A_i = A + \int \varepsilon\,t\,d\,V\,(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$

und

$$A = \frac{1}{2\,E}\int\Big[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{2}{m}\left(\sigma_y\,\sigma_z + \sigma_z\,\sigma_x + \sigma_x\,\sigma_y\right)\Big]d\,V + \frac{1}{2\,G}\int\left(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2\right)d\,V$$

ist. Damit ist der oben stehende Satz bewiesen.

In der Statik der Baukonstruktionen handelt es sich häufig um die Berechnung eines statisch unbestimmten Trägersystemes, welches theils fachwerkartig, theils vollwandig angeordnet ist (z. B. eines Fachwerkbogens mit einem vollwandigen Stücke in der Mitte, oder einer Kette, versteift durch einen vollwandigen Balken) und für dessen vollwandigen, in irgend einem Querschnitte durch ein Moment M und eine achsiale Kraft N beanspruchten Theil die Normalspannungen σ nach der Formel

$$\sigma = \frac{M\,\eta}{J} + \frac{N}{F}$$

berechnet werden können, wobei:

η der Abstand des mit der Spannung σ behafteten Querschnitts-Elementes von der normal zur Kraftebene gelegenen Querschnitts-Schwerachse,*)

J das Trägheitsmoment des Querschnittes, bezogen auf diese Schwerachse,

F der Inhalt des Querschnittes.

Für einen solchen Träger ergiebt sich bei Vernachlässigung der Wirkung der Schubspannungen:

$$A = \sum \frac{S^2\,s}{2\,Ef} + \int \frac{M^2\,ds}{2\,E\,J} + \int \frac{N^2\,d\,s}{2\,E\,F}.$$

Das Zeichen $\int$ bezieht sich auf den vollwandigen Theil, das Zeichen $\sum$ auf die Stäbe des Fachwerkes. S, s, f bedeuten beziehungsweise die Spannkraft, die Länge und den Querschnitt eines Fachwerk-Stabes.

Die ideelle Formänderungs-Arbeit ist:

$$4)\qquad A_i = A + \sum S\,\varepsilon\,t\,s + \iint \sigma\,\varepsilon\,t\,d\,s\,d\,F$$

und, wenn t innerhalb des Querschnittes F konstant angenommen werden darf,

$$5)\qquad A_i = A + \sum S\,\varepsilon\,t\,s + \int N\,\varepsilon\,t\,d\,s.$$

Benutzt man nun den Satz vom Minimum des Werthes A_i zur Berechnung eines statisch nicht bestimmbaren Auflager-Widerstandes X, so folgt aus

$$\frac{d\,A_i}{d\,X} = 0$$

die Gleichung:

$$6)\qquad 0 = \sum\left(\frac{S}{Ef} + \varepsilon\,t\right)s\,\frac{d\,S}{d\,X} + \int \frac{M\,d\,s}{E\,J}\,\frac{d\,M}{d\,X} + \int\left(\frac{N}{E\,F} + \varepsilon\,t\right)d\,s\,\frac{d\,N}{d\,X},$$

und es ist ersichtlich, dass sich eine mit Gl. 4 übereinstimmende Gleichung ergiebt, wenn zunächst der Zustand $t = 0$ angenommen, also der Satz

$$\frac{d\,A}{d\,X} = 0$$

angewendet wird, und dann in der fertigen Elasticitäts-Gleichung jede der Dehnungen $\frac{S}{Ef}$ und $\frac{N}{EF}$ um den Betrag $\varepsilon\,t$ vermehrt, oder, was dasselbe ist, wenn die achsialen Kräfte S und N um $\varepsilon\,t\,Ef$ bezw. $\varepsilon\,t\,EF$ vergröfsert werden. Die nur von den Momenten M abhängigen Integrale bleiben ungeändert. Lassen sich also einzelne Elasticitäts-Gleichungen aufstellen, in denen nur Momente M und keinerlei Achsialkräfte vorkommen, was öfter der Fall ist, so gelten diese für jeden Temperatur-Zustand.

Bezüglich der Anwendung der Gl. 6 und der an dieselbe geknüpften Bemerkungen verweist der Verf. auf seinen, in der Zeitschrift für Bauwesen (1883, S. 311 u. f.) veröffentlichten Beitrag zur Theorie der Versteifung der Bogenträger, sowie auf die interessanten Mittheilungen von Melan in der Wochenschrift des österr. Ingenieur- und Architekten-Vereins 1883, Nr. 24 u. 27.*)

Nimmt man hingegen an, dass die Temperatur-Aenderung innerhalb eines Querschnittes des vollwandigen Theiles veränderlich ist, und zwar so, dass sie dem Gesetze $t = C + C_1\,\eta$ folgt (unter C und C_1 Konstante verstanden), und bezeichnet man mit $\eta = +e_1$ und $\eta = -e_2$ die Grenzwerthe von η, ferner mit t_1 und t_2 die für diese Grenzwerthe beobachteten Werthe t, so ist

$$t = t_1\,\frac{e_2}{h} + t_2\,\frac{e_1}{h} + (t_1 - t_2)\,\frac{\eta}{h},$$

wobei $h = e_1 + e_2$ die Querschnittshöhe bedeutet. Die Gl. 4 geht dann nach Einführung der Werthe t und σ über in

$$A_i = A + \sum S\,\varepsilon\,t\,s + \int N\,\varepsilon\left(t_1\,\frac{e_2}{h} + t_2\,\frac{e_1}{h}\right)d\,s + \int \frac{M}{h}\,\varepsilon\,(t_1 - t_2)\,d\,s,$$

und es folgt aus $\frac{d\,A_i}{d\,X} = 0$ die Bedingung:

$$7)\qquad 0 = \sum\left(\frac{S}{Ef} + \varepsilon\,t\right)s\,\frac{d\,S}{d\,X} + \int\left[\frac{M}{EJ} + \varepsilon\,\frac{t_1 - t_2}{h}\right]\frac{d\,M}{d\,X}\,d\,s + \int\left[\frac{N}{EF} + \varepsilon\left(t_1\,\frac{e_2}{h} + t_2\,\frac{e_1}{h}\right)\right]\frac{d\,N}{d\,X}.$$

Aus dieser Beziehung kann man für den vorliegenden Fall folgern:

Der Einfluss einer Aenderung des Temperatur-Zustandes lässt sich auch in der Weise berücksichtigen, dass in der, zunächst für den Zustand $t = 0$ abgeleiteten Elasticitäts-Gleichung die Achsialkräfte S und N beziehungsweise um $\varepsilon\,t\,Ef$ und $\varepsilon\left(t_1\,\frac{e_2}{h} + t_2\,\frac{e_1}{h}\right)EF$, sowie das Moment M um $\varepsilon\,(t_1 - t_2)\,\frac{EJ}{h}$ vergröfsert werden.

Untersuchungen, wie die zuletzt durchgeführte, sind z. B. nöthig, wenn bei sehr hohen kontinuirlichen Balkenträgern für die untere Gurtung eine wesentlich andere Temperatur-Aenderung t_1 beobachtet wird, als für die obere Gurtung. Die hier an Gl. 7 geknüpften Bemerkungen zeigen, wie in diesem Falle (und in einer ganzen Reihe ähnlicher Fälle) die für den Zustand $t = 0$ gültigen, allgemein bekannten Elasticitäts-Gleichungen abzuändern sind.

*) Dabei zählen die positiven η nach unten, wenn — wie beispielsweise beim einfachen Balken — die positiven Momente in der unteren Querschnittshälfte Zugspannungen σ hervorbringen.

*) Vergl. auch den Auszug: 1884, S. 85.